PART2　絶対値を含む関数の定積分

2　次の定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int_{-1}^{3} x|x-2|\,dx$

(2) $\displaystyle\int_{0}^{3} |x^2-3x+2|\,dx$

Point Pickup

絶対値記号を場合分けによってはずし，絶対値記号をはずす境目の値で積分区間を分け，それぞれの区間において場合分けによって絶対値記号をはずした関数を用いて積分を行う。

第17講　PART2　確認問題

次の定積分を求めよ。

1 $\displaystyle\int_{-\frac{1}{2}}^{1} 6x|2x-1|dx=\frac{\boxed{ア}}{\boxed{イ}}$

2 $\displaystyle\int_{-3}^{1} |3x^2+6x|dx=\boxed{ウエ}$

PART2　絶対値を含む関数の定積分

2　次の定積分を求めよ。

(1)　$\displaystyle\int_{-1}^{3} x|x-2|dx$

(2)　$\displaystyle\int_{0}^{3} |x^2-3x+2|dx$

(1)　$x|x-2|=\begin{cases} -x(x-2)=-x^2+2x & (-1 \leqq x \leqq 2) \\ x(x-2)=x^2-2x & (2 \leqq x \leqq 3) \end{cases}$ であるから

$$\int_{-1}^{3} x|x-2|dx=\int_{-1}^{2}(-x^2+2x)dx+\int_{2}^{3}(x^2-2x)dx$$

$$=\left[-\frac{1}{3}x^3+x^2\right]_{-1}^{2}+\left[\frac{1}{3}x^3-x^2\right]_{2}^{3}$$

$$=-\frac{1}{3}(8+1)+(4-1)+\frac{1}{3}(27-8)-(9-4)=\frac{4}{3}$$

(2)　$x^2-3x+2=(x-1)(x-2)$ より，

$|x^2-3x+2|=\begin{cases} x^2-3x+2 & (0 \leqq x \leqq 1) \\ -x^2+3x-2 & (1 \leqq x \leqq 2) \\ x^2-3x+2 & (2 \leqq x \leqq 3) \end{cases}$ であるから

$$\int_{0}^{3}|x^2-3x+2|dx=\int_{0}^{1}(x^2-3x+2)dx+\int_{1}^{2}(-x^2+3x-2)dx+\int_{2}^{3}(x^2-3x+2)dx$$

$$=\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2+2x\right]_{0}^{1}+\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2-2x\right]_{1}^{2}+\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2+2x\right]_{2}^{3}$$

$$=\frac{1}{3}-\frac{3}{2}+2-\frac{1}{3}(8-1)+\frac{3}{2}(4-1)-2(2-1)$$

$$+\frac{1}{3}(27-8)-\frac{3}{2}(9-4)+2(3-2)$$

$$=\frac{11}{6}$$

第17講　PART2　確認問題 解答

1 **[正解]** ア：1，イ：4

[解説]

$$6x|2x-1|$$
$$=\begin{cases}-6x(2x-1)=-12x^2+6x & \left(-\dfrac{1}{2}\leqq x\leqq\dfrac{1}{2}\right)\\ 6x(2x-1)=12x^2-6x & \left(\dfrac{1}{2}\leqq x\leqq 1\right)\end{cases}$$

であるから

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{1}6x|2x-1|dx$$
$$=\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}(-12x^2+6x)dx+\int_{\frac{1}{2}}^{1}(12x^2-6x)dx \quad \text{[A]}$$
$$=2\int_{0}^{\frac{1}{2}}(-12x^2)dx+\int_{\frac{1}{2}}^{1}(12x^2-6x)dx \quad \text{[B]}$$
$$=2\Big[-4x^3\Big]_0^{\frac{1}{2}}+\Big[4x^3-3x^2\Big]_{\frac{1}{2}}^{1}$$
$$=-8\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3+4\left\{1^3-\left(\frac{1}{2}\right)^3\right\}-3\left\{1^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2\right\}$$
$$=\boldsymbol{\frac{1}{4}}$$

[A]　絶対値記号を場合分けによってはずし，絶対値記号をはずす境目の値で積分区間を分け，それぞれの区間において場合分けによって絶対値記号をはずした関数を用いて積分を行う。

[B]

n が奇数のとき　$\displaystyle\int_{-a}^{a}x^n\,dx=0$

n が偶数のとき　$\displaystyle\int_{-a}^{a}x^n\,dx=2\int_{0}^{a}x^n\,dx$

2 **[正解]** ウエ：12

[解説]

$3x^2+6x=3x(x+2)$ より

$$|3x^2+6x|=\begin{cases}3x^2+6x & (-3\leqq x\leqq -2)\\ -3x^2-6x & (-2\leqq x\leqq 0)\\ 3x^2+6x & (0\leqq x\leqq 1)\end{cases}$$

であるから

$$\int_{-3}^{1}|3x^2+6x|dx$$

$$=\int_{-3}^{-2}(3x^2+6x)dx+\int_{-2}^{0}(-3x^2-6x)dx \quad \text{[A]}$$

$$+\int_{0}^{1}(3x^2+6x)dx$$

$$=\Big[x^3+3x^2\Big]_{-3}^{-2}+\Big[-x^3-3x^2\Big]_{-2}^{0}+\Big[x^3+3x^2\Big]_{0}^{1}$$

$$=(-2)^3-(-3)^3+3\{(-2)^2-(-3)^2\}$$

$$-\{-(-2)^3-3(-2)^2\}+1^3+3\cdot 1^2$$

$$=\mathbf{12}$$